第五章 期权：一个套利定价的例子

Review&Preview

- 上一章我们介绍了无套利原理和资产定价的基本原理，以及有关资产定价的一些基本性质。然而我们所讲的只是这些性质的一般形式。
- 本章我们将运用无套利原理为期权定价。

Structure

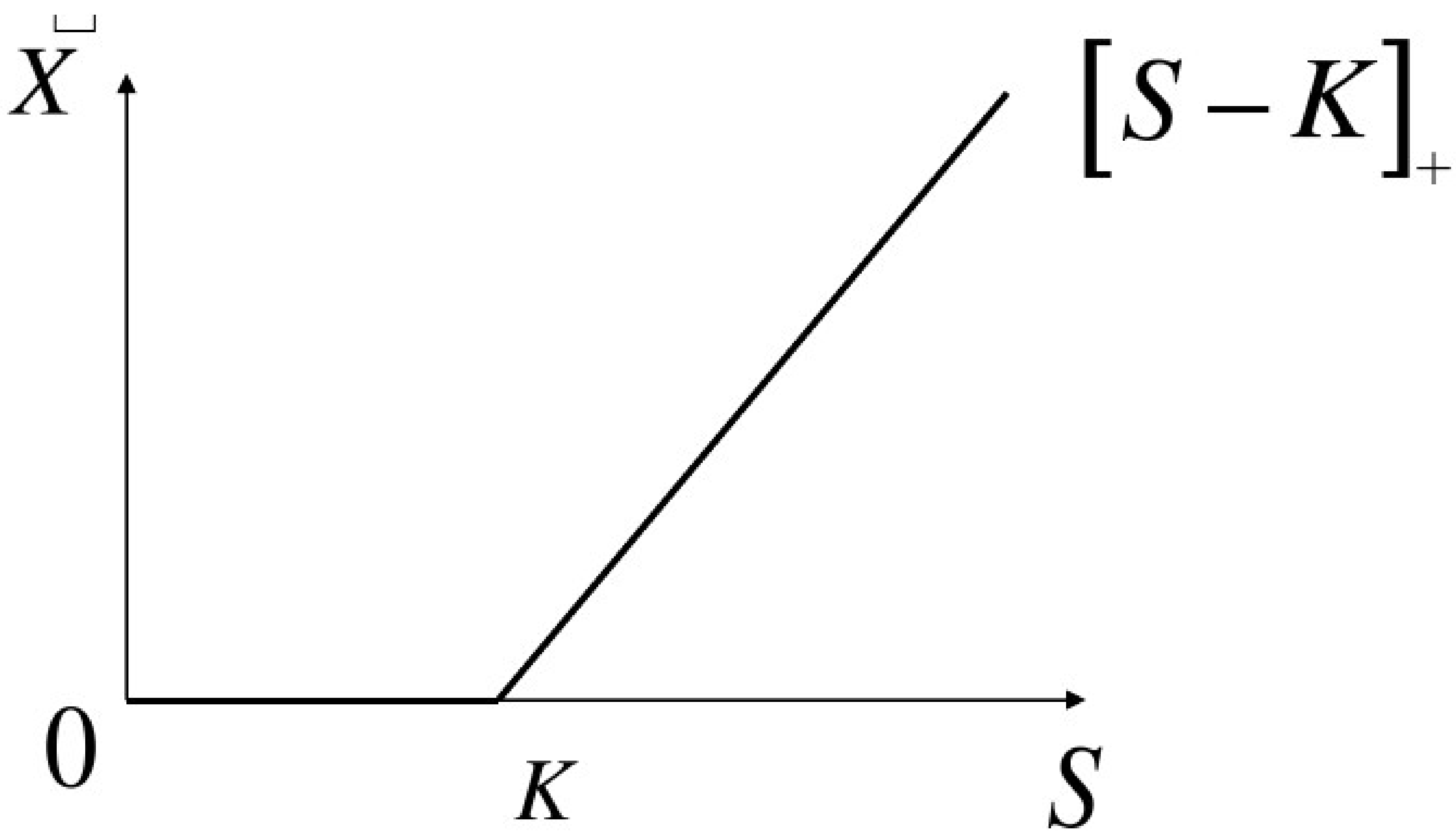
- 5.1 期权
- 5.2 期权价格的性质和界
- 5.3 美式期权以及提前执行
- 5.4 完全市场中的期权定价
- 5.5 期权和完全市场化
- 5.6 本章小结
- 5.7 练习

5.1 Option

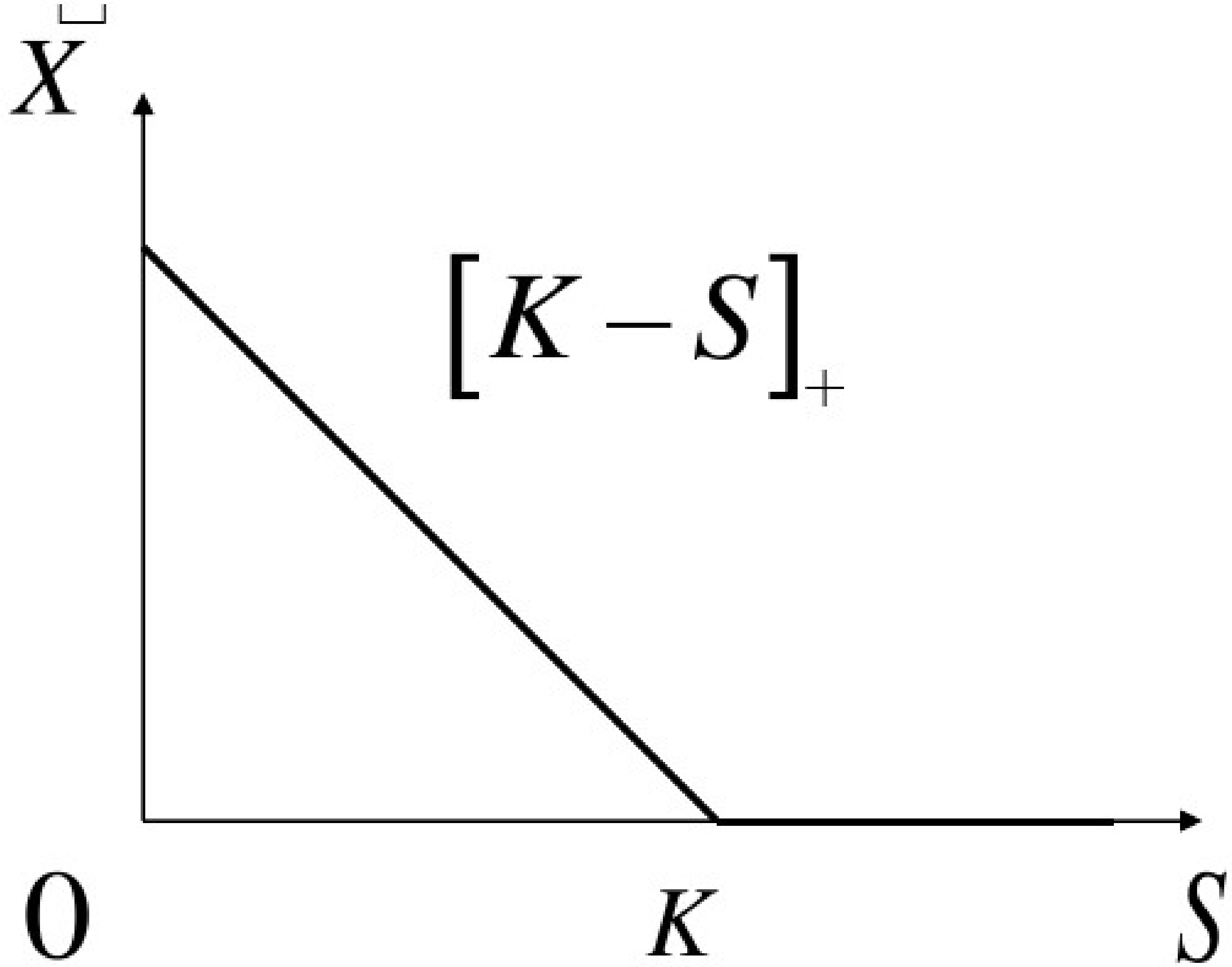
- 按照金融资产是否与实物资产直接联系，金融资产可以分为两类：原生金融资产和衍生金融资产。
- 原生金融资产与实物资产直接联系。
- 衍生金融资产是指其价值依赖于原生金融资产的金融工具。即衍生金融资产与实物资产的联系是间接地通过原生金融资产实现的。

- 记一只证券$t=1$期的支付为$\tilde{X}$，$t=0$期的价格为S。在本章的讨论当中，我们将它统称为“股票”。
- 定义5.1 **欧式看涨（看跌）期权**给与期权购买者在未来某一给定日期、以某一确定价格K从（向）期权出售者处买入（卖出）单位股票的权利。
- 期权购买者可以执行其权利的日期叫做**到期日**，K叫做**执行价格**。买入（卖出）的股票叫做**标的证券**或者**标的资产**。

- 记 $\tilde{c}$ 为欧式看涨期权 $t=1$ 期的支付，$\tilde{p}$ 为欧式看跌期权 $t=1$ 期的支付。
- $\tilde{c}=\left[\tilde{X}-K\right]_+$, $\tilde{p}=\left[K-\tilde{X}\right]_+$ （5.1）
- 这里 $\left[x\right]_+=\max\left[0,x\right]$。



（a）欧式看涨期权



（b）欧式看跌期权

- 定义5.2 执行价为K、到期日为 t的**美式看涨（看跌）期权**赋予期权购买者在到期日前任意日期（包括到期日）、以某一确定价格K从（向）期权出售者处买入（卖出）单位股票的权利。
- 因为美式期权给予所有者提前执行的权利，所以相对于欧式期权来说，它们给予了所有者更多的权利。也正因为美式期权可以提前行权，使得美式期权变得更加复杂。

商务印书馆《英汉证券投资词典》解释：亦作：**期权合约**。期权合约以金融衍生产品作为行权品种的交易合约。指在特定时间内以特定价格买卖一定数量交易品种的权利。合约买入者或持有者(holder)以支付保证金——**期权费**(option premium)的方式拥有**权利**；合约卖出者或立权者(writer)收取期权费，在买入者希望行权时，必须履行**义务**。从其本质上讲，期权实质上是在金融领域中将权利和义务分开进行定价，使得权利的受让人在规定时间内对于是否进行交易，行使其权利，而义务方必须履行。

- 称$S-K$为看涨期权的内在价值，也就是今天执行期权所带来的支付。那么，看跌期权的内在价值是$K-S$。如果一份期权的内在价值大于、等于或小于0的话，我们相应的称之为实值、平值以及虚值期权。
- 期权是两个参与者之间订立的合约。期权购买者获得了从（对）卖出者买入（卖出）标的证券的权利。当期权购买者行权时，期权购买者所得到的支付正是来自于期权卖出者的支付。这就是说，期权是购买者和卖出者之间的零和交易。从经济的总体来看，期权的净头寸恒为 。 0

- 另外，期权的支付总是由标的资产的价格或支付来决定。满足（1）净供给量为0，以及（2）支付由其他证券的价格或支付来决定这两个条件的证券也叫做**衍生证券**。
- 记$c(S,K)$为欧式看涨期权$t=0$期的价格，而欧式看跌期权$t=0$的价格为$p(S,K)$；记$C(S,K)$，$P(S,K)$为相应的美式期权的价格。

- 我们想要回答的问题是如何为这些期权定价。依靠无套利原理，我们分两步来回答这个问题。
- 第一步，我们分析期权价格的一些基本性质并且导出期权价格的上界和下界。
- 第二步，在完全市场的假设下，我们导出期权定价的精确公式。

5.2 期权价格的性质和界

- 期权的价格受多种因素的影响：
- 第一个也是最重要的是标的证券的价格和支付。
- 第二个是期权的合同条款：到期日以及执行价。
- 第三是利率。

- 定理5.1 $c(S,K)$和 $p(S,K)$ 是非负的。
- 证明依据：期权的支付非负，无套利原理。
- 定理5.2 对 非增，对 非减。
- 证明：$c(S,K)$, K $p(S,K)$ 。K因此，由无套利原理有 $\forall K_1 > K_2$ $\left[\tilde{X}-K_1\right]_+ \le \left[\tilde{X}-K_2\right]_+$ （定理4.5）。
- 定理5.3 与 $c\left(S,K_1\right) \le c\left(S,K_2\right)$ 是 的凸函数。
- 证明：$\forall K_1, K_2$ 以及 $\alpha \in (0,1)$, $c(S,K)$ $p(S,K)$

  K

  $\forall K_1, K_2$ $\alpha \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
&\left[\tilde{X}-\left(\alpha K_1+(1-\alpha)K_2\right)\right]_+ \\
&=\left[\alpha\left(\tilde{X}-K_1\right)+(1-\alpha)\left(\tilde{X}-K_2\right)\right]_+ \\
&\le \alpha\left[\tilde{X}-K_1\right]_+ +(1-\alpha)\left[\tilde{X}-K_2\right]_+
\end{aligned}
$$

- 不失一般性，设 $K_1 < K_2$。$\tilde{X}-K_1$ 和 $\tilde{X}-K_2$ 同号时，等式成立；异号时不等式严格成立。也就是说，$\left[\tilde{X}\ \text{是}K\right]_+$ 的 K 凸函数。由 $c(S,K)=V\left(\left[\tilde{X}-K\right]_+\right)$ 及 $V(\cdot)$ 是线性算子可知，$c(S,K)$ 也是 K 的凸函数。

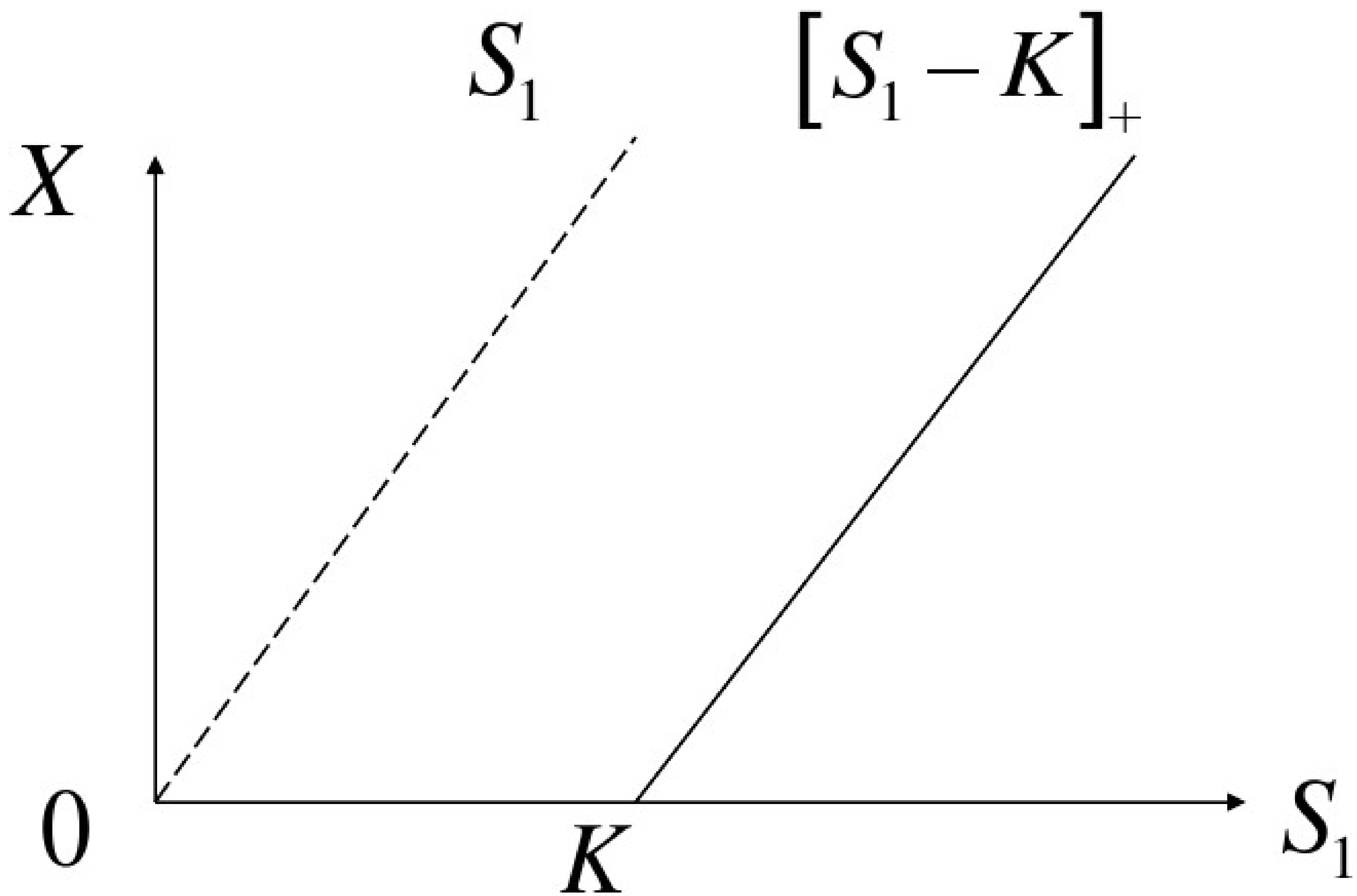
- 定理5.4 记 $\theta \geq 0$ 为由 N 只证券组成的组合，价格向量为 $S=[S_1;\cdots;S_N]>0$ 以及执行价格向量为 $K=[K_1;\cdots;K_N]>0$。那么

$$c\left(S^T\theta, K^T\theta\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \theta_i c\left(S_i, K_i\right)$$

$$p\left(S^T\theta, K^T\theta\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \theta_i p\left(S_i, K_i\right)$$

- 因此，以组合资产为标的的期权价值要小于以组合中的单个证券为标的的资产的相应期权的组合的价值。

- 而 $S=V\left(\tilde{X}\right)$，$c(S,K)=V\left(\left[\tilde{X}-K\right]_{+}\right)$。由无套利原理,$S\geq c\left(S,K\right)$。



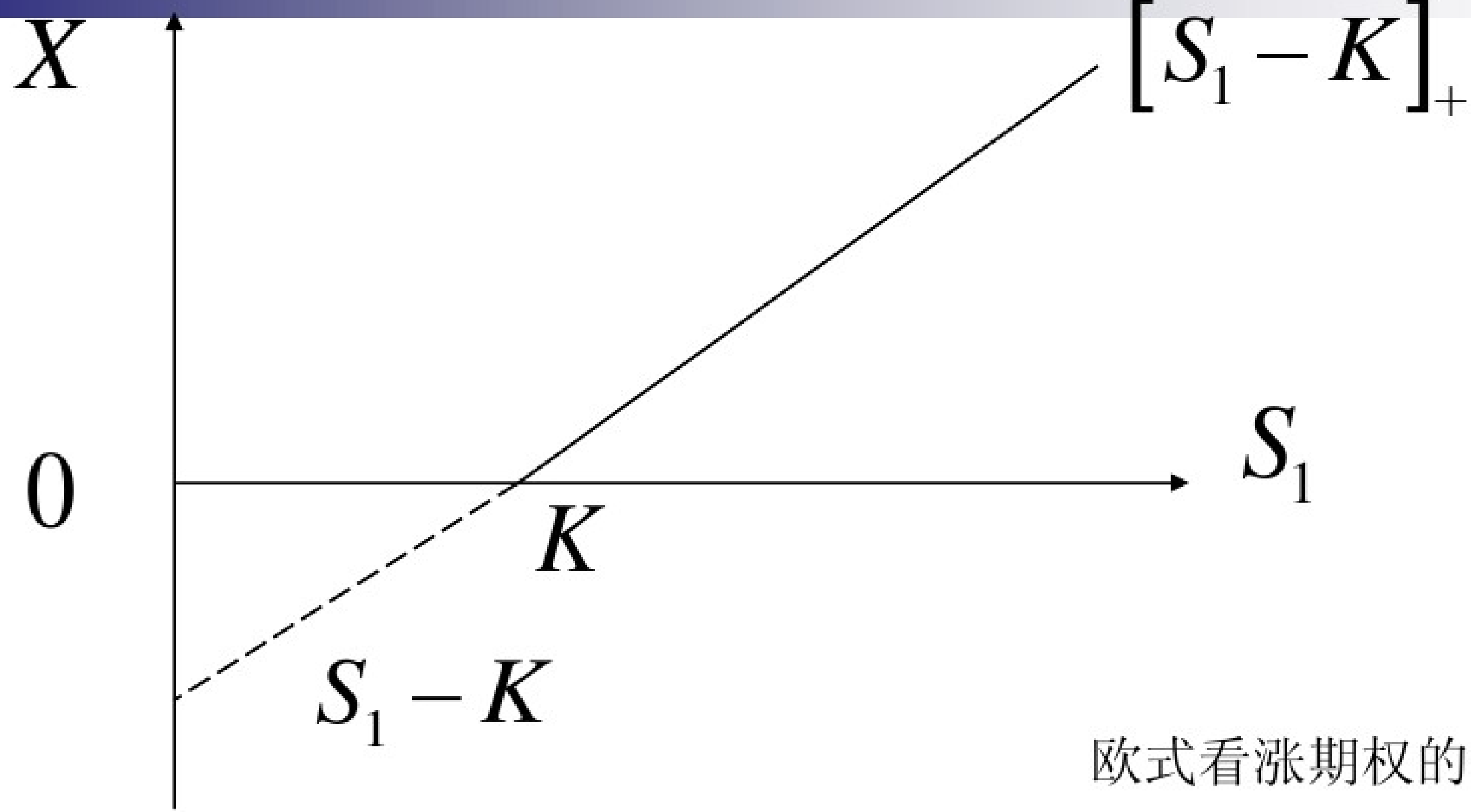
欧式看涨期权的价格上界

- 定理5.6 如果存在无风险证券，其收益率也就是利率为 r_F，那么

$$c(S,K) \geq \left[S - K/(1+r_F)\right]_+$$

- 证明：考虑这样一个组合，买入一份股票同时卖空 K 份无风险证券，其现值为$S-K/(1+r_F)$。它在 $t=1$期的支付为 $\tilde{X}-K$。因为$\left[\tilde{X}-K\right]_+ \geq \tilde{X}-K$，如下图所示，所以$c(S,K) \geq S-K/(1+r_F)$。并且我们知道$c(S,K) \geq 0$。综合这两个结果可以得到

$$c(S,K) \geq \left[S - K/(1+r_F)\right]_+$$



欧式看涨期权的价格下界

- 综合上面两个定理，我们得到了欧式看涨期权价格的上界和下界：

$$\left[S - K/(1+r_F)\right]_+ \leq c(S,K) \leq S \quad (5.2)$$

-

- 定理5.7 （看涨—看跌期权的平价关系）如果存在无风险证券且利率为 r_F ，那么
- $$c(S,K)+K/(1+r_F)=p(S,K)+S \quad （5.3）$$
- 证明：考虑如下的两个组合：
- 1.买入 1 份执行价格为 K 的看涨期权和 K 份无风险证券；
- 2.买入 1 份执行价格为 K 的看跌期权和 1 份股票。

- 让我们来比较它们在1期的支付：

	$\tilde{X} \le K$	$\tilde{X} > K$
组合1	$\left[\tilde{X} - K\right]_+ + K = K$	$\left[\tilde{X} - K\right]_+ + K = \tilde{X}$
组合2	$\left[K - \tilde{X}\right]_+ + \tilde{X} = K$	$\left[K - \tilde{X}\right]_+ + \tilde{X} = \tilde{X}$

- 显然，组合1和组合2在1期的支付完全一样。因此。他们在今天的成本也一定相等，即（5.3）式成立。

5.3 美式期权以及提前行权

- 对于美式期权来说，提前行权只是权利而非义务。如果持有美式期权至到期日，那么它的支付与相应的欧式期权完全一样。正是因为美式期权持有者有权力提前行权，而他只有在更优时才提前行权，所以美式期权的价格永远不会低于相应的欧式期权的价格。
- $C(S,K)\geq c(S,K), P(S,K)\geq p(S,K)$（5.4）

- 影响提前行权的一个重要因素是标的证券支付的**股利**。股息、红利合称为股利。股份公司通常在年终结算后，将盈利的一部分作为股息按股额分配给股东。
- 前面的讨论中，我们假设证券只在1期才有支付。实际上，证券在0期也可能有支付，即股利。

- 例 假设在0期，价格为100元的股票支付100元的股利。这就象公司清算一样：变卖所有的资产得到100元，并将之全部用来支付股利。支付股利后，股票价格降为0，因为它变成了一份空的要求权。
- 现在让我们来考虑一份以此股票为标的证券的欧式看涨期权，执行价为80元，1期到期。因为1期时股票价格降为0，使得期权的支付也为0。它现在的价格当然也只能是0。那么相应的美式期权又如何呢？其持有者可以在股利消息公布以后、发放以前就提

- 前行权。这样以80元买入股票，马上就可得到100元的股利。净支付为20元。因此，在这个例子中提前执行美式期权是最优的，可以得到20元的收益。这显然要优于欧式看涨期权。
- 因此，在分析是否提前行权时，我们必须考虑标的证券发放股利的可能性。

- 5.3.1 无股利时提前行权
- 首先考虑看涨期权。没有股利时，美式看涨期权将不会提前行权。
- 为了证明这一定，我们注意到提前行权得到的支付为 $\boldsymbol{S-K}$。但是

$$S-K \le S-K/(1+r_F) \le \left[S-K/(1+r_F)\right]_+ \le c(S,K)$$

- 也就是说，提前行权所得到的价值不会高于把他当做欧式看涨期权卖出所得到的价值。因为在某些状态下严格不等式成立，因此提前行权是次优的。

- 有两个因素决定提前行权的成本。
- 第一个因素是货币的时间价值。如果提前行权，我们就得立即支付执行价格而不是等到以后。当利率大于零时，同样的付出越晚越好。这就是上式中的第一个不等式所反映的。为了看清这一点，考虑如下的行权策略：到期日时无论股票价格如何都行权。这样所得到的支付为 $\tilde{X} - K$，即付出 K 而得到 $\tilde{X}$，它的现值是 $S - K/(1+r_f)$。这显然优于立即行权所带来的价值，因为执行价是在到期日支付而不是现在。

- 第二个因素是在到期日不行权的权利。前面的行权策略没有考虑到期日是不行权的情形。如果在到期日、当$\tilde{X}$低于K时我们可以选择不行权，那么其所带来的支付$\left[\tilde{X}-K\right]_+$显然优于无论如何都执行所带来的支付$\tilde{X}-K$。这就是上式中第二个不等式的来源。
- 上述两个因素给出来提前行权的代价。因此，如果没有股利，美式看涨期权将不会提前行权，$C(S,K)=c(S,K)$。

- 接着考虑美式看跌期权。没有股利时，提前行权可能是最优的。
- 这里，提前行权的成本是放弃了对支付有了更多了解后可能选择不执行的权力；而提前行权的收益是执行价格的时间价值。如果提前行权，持有者现在就可以得到执行价格而不是在将来。

$$P(S,K)=\max\left[K-S,p(S,K)\right]$$

$$=\max\left[K-S,K/(1+r_F)-S+c(S,K)\right]$$

- 如果 $K-S>K/(1+r_F)-S+c(S,K)$，则提前行权是最优的。也就是说，当 $Kr_F/(1+r_F)>c(S,K)$ 时应提前行权。当 $K \gg S$ 时，上述不等式成立。
- 5.3.2 有股利时提前行权
- 假设股票在 $t=0$ 期时还支付股利 D，记 S 为发放股利后的股价。
- 美式看涨期权持有者在 $t=0$ 期有两个选择：
- （1）支付 K 行权，获得股利后马上抛出股票，得到总额为 $D+S$ 的支付
- （2）持有期权直至到期日 $t=1$ 期。

- 在最有执行策略下：

$$C(S,D,K)=\max\left[S+D-K,c(S,K)\right]$$

- 其中，$C(S,D,K)$是发放股利前美式看涨期权的价值。相应地，对于看跌期权有：

$$P(S,D,K)=\max\left[K-S-D,p(S,K)\right]$$

- 由（5.4）式，有$C(S,D,K)\geq c(S,K)$和$P(S,D,K)\geq p(S,K)$。因此，对于美式期权来说，股利促使持有者提前执行看涨期权、推迟执行看跌期权。

- 在有股利时，看涨期权和看跌期权之间的平价关系也会受到影响。考虑如下组合：
- 1.买入 1份执行价为 K 的看涨期权和现值为 $K/(1+r_F)+D$ 的无风险证券；
- 2.买入 1份执行价为 K 的看跌期权和 1份股票。
- 比较它们在 1期的支付：

	$\tilde{X} \le K$	$\tilde{X} > K$
组合1	$K + D(1+r_F)$	$\tilde{X} + D(1+r_F)$
组合2	$K + D(1+r_F)$	$\tilde{X} + D(1+r_F)$

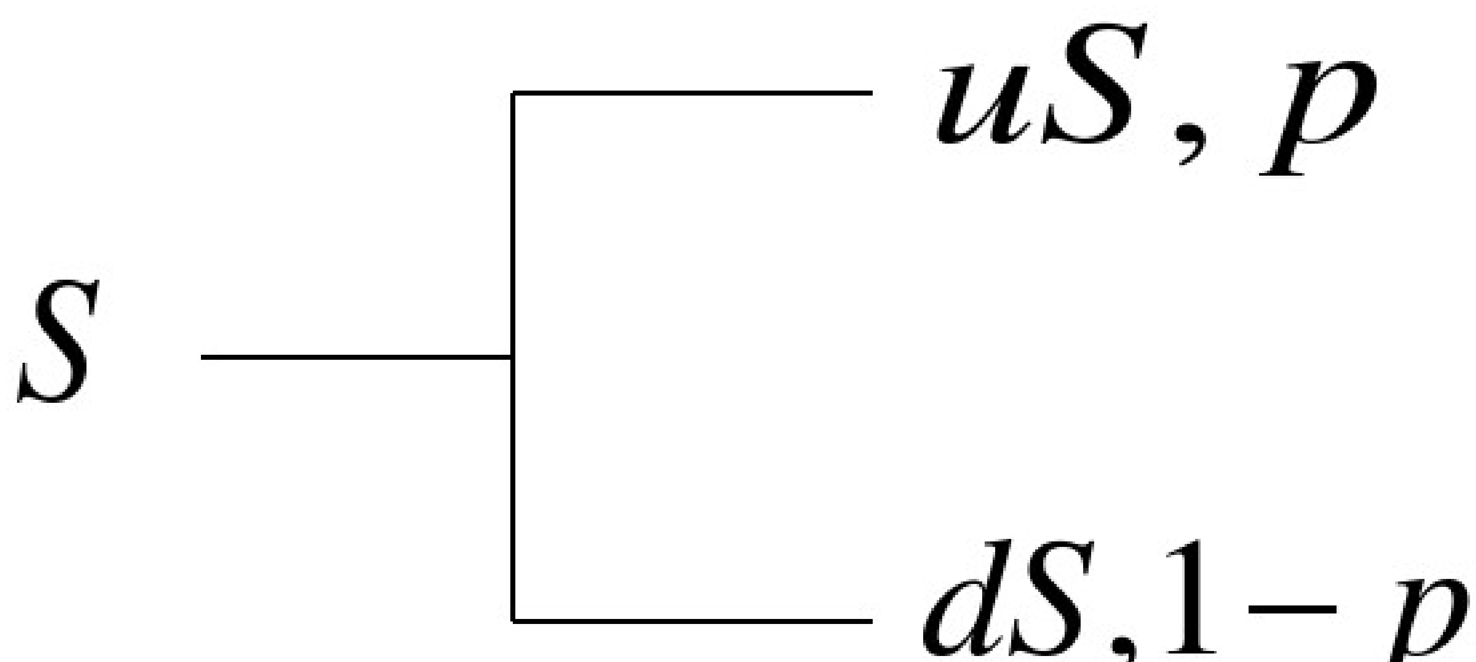
- 显然，组合1和组合2在1期的支付完全相同。因此，它们在今天的成本也一定相等，即如果有股利，欧式看涨期权和看跌期权之间的平价关系变为

$$c(S,K) + K/(1+r_F) + D = S + p(S,K)$$

5.4 完全市场中的期权定价

- 如果证券市场是完全的，那么存在唯一的状态价格向量：$\phi_\omega, \forall \omega \in \Omega$。记$S_\omega$为标的证券在状态$\omega$时的支付。那么
$$c(S,K)=\sum_\omega \phi_\omega \left[S_\omega - K\right]_+ = E^Q\left[\tilde{S}-K\right]_+ \Big/ (1+r_F)$$
- 这里，Q 是风险中性测度。为了得到更为具体的结果，我们必须对股票价格在1期的可能取值做进一步的假设，也就是说，我们必须对股票价格的过程作更具体的描述。

- 作为一个经典例子，我们考虑股票价格的二叉树过程模型。
- 记 S 为股票现在的价格。二叉树过程假设下其股价有两个可能：有 p 的概率上升到 $u\times S$，有 $1-p$ 的概率下降到 $d\times S$。不失一般性，假设 $u>d$。我们用下面的二叉树来表示这样的股价过程：



- 假设 证券市场中存在无风险证券，利率是r_F。令它在1期的支付为1，并记它的价格为B。则

$$B = 1/(1+r_F)$$

- 无风险证券的价格也可用二叉树过程来表示

$$\begin{tikzcd} & 1,\ p \\ B \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & 1,\ 1-p \end{tikzcd}$$

- 首先，我们要求上面给出的股票和无风险证券的价格过程不存在套利机会。即

$$d < 1 + r_F < u$$

- 证明：反证法
- 设$d \geq 1+r_F$，考虑下面的套利组合：买入一份股票，支付为S，同时卖出$S(1+r_F)$份无风险证券，收入恰好为S，因此在0期的净支付为0。该组合在股票价格上升时，在1期得到的支付是$[u-(1+r_F)]S>0$，在股票价格下降时得到的支付是$[d-(1+r_F)]S \geq 0$。这显然是一个套利机会。因此有$d<1+r_F$；同理可得$u>1+r_F$。

- 因为1期有两个可能状态，由资产定价基本定理，存在状态价格向量$\phi=\left[\phi_u;\phi_d\right]$□ 0，其中$\phi_u$和$\phi_d$分别为对应于“上”和“下”$u$，$d$或 和的状态价格，使得

$$S=\phi_u uS+\phi_d dS \qquad B=\phi_u+\phi_d$$

- 由此立即得到

$$\phi_u=\frac{1}{1+r_F}\frac{1+r_F-d}{u-d},\phi_d=\frac{1}{1+r_F}\frac{u-(1+r_F)}{u-d}$$

- 这里，因为只有两个状态，两只支付是线性独立的证券—股票和证券—从而使得

- 市场是完全的，并且它们的价格唯一地确定了状态价格。
- 给定状态价格，得到期权价格为
- $$c = \phi_u \left[uS - K\right]_+ + \phi_d \left[dS - K\right]_+ \qquad （5.5）$$
- 也就是说，从股票和债券的价格出发，可以确定期权或者其他任一证券的价格。
- 在二叉树模型中，由于只有两个状态，股票和债券使得证券市场完全化，其他证券都成了冗余证券。根据无套利原理，他们的价格完全由复制组合的价格决定，而

- 复制组合的价格又有组合中股票与债券的持有量以及他们的价格决定。
- 接下来，我们就是用上述方法来给执行价为K的欧式看涨期权定价。
- 在到期日期权的支付为$\left[S_1 - K\right]_+$，它取决于最终的股价。到期日期权的价值为

$$c_1 = \begin{cases} c_u \equiv \left[uS - K\right]_+, S_1 = uS \\ \\ c_d \equiv \left[dS - K\right]_+, S_1 = dS \end{cases}$$

- 现在考虑一个组合有股票和债券的组合：θ_S份股票和θ_B份债券。它在两个可能状态下的

- 支付将是

$$v_1 = \begin{cases} v_u = \theta_S uS + \theta_B, S_1 = uS \\ v_d = \theta_S dS + \theta_B, S_1 = dS \end{cases}$$

- 选择θ使得$v_u = c_u$且$v_d = c_d$ 。

$$\theta_S = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S}, \theta_B = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)}$$

- 因此，这个组合与所考虑的期权具有完全相同的支付。而这个复制组合在$t=0$的价值为$v = \theta_S S + \theta_B/(1+r_F)$。无套利原理要求期权的价格$c$必须等于$v$：

$$c=\frac{1}{1+r_F}\left[\frac{(1+r_F)-d}{u-d}c_u+\frac{u-(1+r_F)}{u-d}c_d\right]$$

- 这恰恰就是(5.5)式。复制组合中所包含股票的股数θ_s也称为对冲比或期权的δ 。
- 给定状态价格，我们可以定义等价鞅测度：

$$q=\frac{\phi_u}{\phi_u+\phi_d}=\frac{1+r_F-d}{u-d},1-q=\frac{\phi_d}{\phi_u+\phi_d}=\frac{u-(1+r_F)}{u-d}$$

- 并把期权定价公式重新写成

$$c=\frac{1}{1+r_F}\left[qc_u+(1-q)c_d\right]=\frac{E^Q\left[c_1\right]}{1+r_F}$$

- 定义$\hat{c}\equiv c/B$和$\hat{S}\equiv S/B$。那么，我们有

$$\hat{c}_t=E_t^Q\left[\hat{c}_{t+1}\right],\hat{S}_t=E_t^Q\left[\hat{S}_{t+1}\right]$$

- 这里$t=0$。所以，$\hat{c}_t$和$\hat{S}_t$在等价鞅测度Q下是鞅。

- 在二叉树股价过程假设下，证券市场是完全的。因此我们可以使用无套利原理，根据股票和债券的价格为期权定价。这就是著名的**二叉树期权定价模型**。它是无套利原理在衍生证券定价中的一个重要应用。

5.5 期权与市场完全化

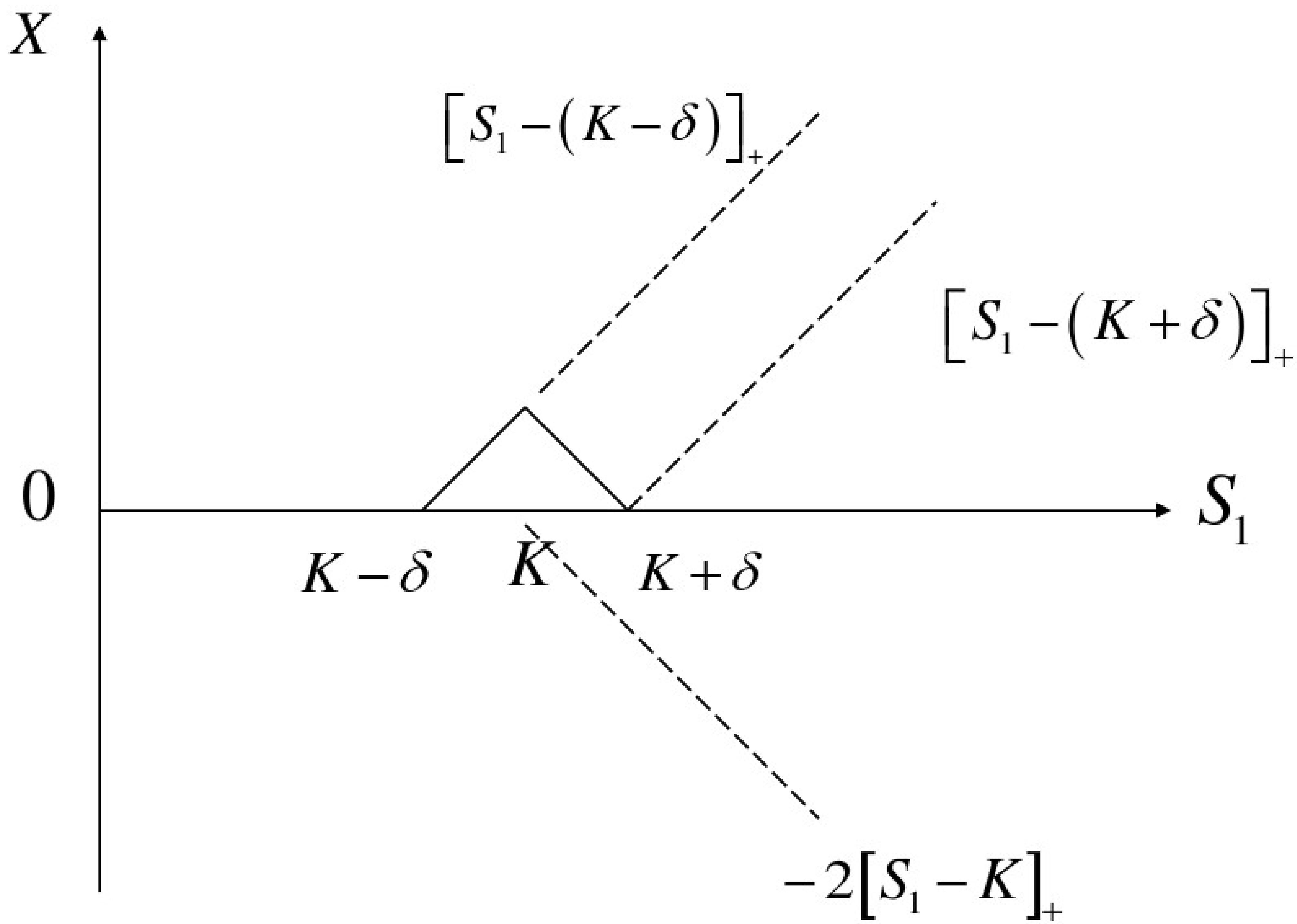
- 如果证券市场是完全的而期权是冗余证券时，根据无套利原理，我们可以用标的证券和债券的价格为期权定价。本节，我们考虑期权不是冗余证券的情况。

- 5.5.1 简单期权策略
- “蝴蝶头寸”是由同一标的证券上的、到期日相同但执行价格不同的欧式看涨期权构成的组合：
- 买入1份执行价为$K-\delta$的看涨期权
- 卖出2份执行价为K的看涨期权
- 买入1份执行价为$K+\delta$的看涨期权
- 这个组合在1期的支付是

$$\left[S-\left(K-\delta\right)\right]_{+}-2\left[S-K\right]_{+}+\left[S-\left(K+\delta\right)\right]_{+}$$

$$
=\begin{cases}
0, & S \le K-\delta \\
S-(K-\delta), & K-\delta<S<K \\
-S+(K+\delta), & K<S<K+\delta \\
0, & K+\delta<S
\end{cases}
$$

- 显然,只有当$S\in(K-\delta,K+\delta)$是组合的支付才不为0。从这个意义上讲，蝴蝶头寸和状态或有证券的支付形式类似。


X
$\left[S_1-(K-\delta)\right]_+$
$\left[S_1-(K+\delta)\right]_+$
0
S_1
$K-\delta$
K
$K+\delta$
$-2\left[S_1-K\right]_+$

- 5.5.2 利用期权使市场完全化
- 假设 存在一只证券，其支付为$\{X_\omega,\omega\in\Omega\}$。如果$\forall\omega,\omega'\in\Omega$及$\omega\neq\omega',X_\omega\neq X_{\omega'}$，则我们称之为具有状态分离的支付，并把这种证券叫做**状态指数证券**。不失一般性，假设如果$\omega<\omega'$，则$X_\omega<X_{\omega'}$。
- 引入以状态指数证券为标的证券的欧式看涨期权。执行价为X_ω的欧式看涨期权具有如下的支付：

$$\left[\tilde{X}-X_\omega\right]_+=\left[0;\cdots;\underset{\omega}{0};\underset{\omega+1}{X_{\omega+1}-X_\omega};\underset{\omega+2}{X_{\omega+2}-X_\omega};\underset{\cdots}{\cdots};\underset{\Omega}{X_\Omega-X_\omega}\right]$$

- 现在考虑如下Ω只证券组成的集合：
- （1）买入1份状态指数证券；
- （2）买入以状态指数证券为标的资产、执行价格分别为$X_1, X_2, \cdots, X_{\Omega-1}$的欧式看涨期权。
- 这Ω只证券的支付矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & X_2 - X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_3 & X_3 - X_1 & X_3 - X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_\Omega & X_\Omega - X_1 & X_\Omega - X_2 & \cdots & X_\Omega - X_{\Omega-1} \end{pmatrix}$$

- 显然，X满秩。因此，有状态指数证券和以其为标的证券、执行价分别为$X_1, X_2, \cdots, X_{\Omega-1}$的$\Omega-1$只欧式看涨期权所组成的证券市场是完全的。以上讨论说明，**引入期权有助于市场的完全化**。
- 接下来我们将证明以状态指数证券为标的的资产的期权组合可以复制状态或有证券。
- 简单起见，假设在状态$\omega=1,2,3,\cdots,\Omega$时状态分离证券的支付分别为$\delta, 2\delta, 3\delta, \cdots; \Omega\delta$。考虑以状态分离证券为标的的资产、执行价分别为$0, \delta, 2\delta, \cdots, (\Omega-1)\delta$的看涨期权组合。

- 记 执行价为$n\delta$的看涨期权的支付向量为 $X_{\square,n}$。所有这些期权的支付矩阵为：

$$
X=\begin{pmatrix}
\delta & 0 & \cdots & 0 \\
2\delta & \delta & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\Omega\delta & (\Omega-1)\delta & \cdots & \delta
\end{pmatrix}
$$

- 考虑如下看涨期权组合的支付向量：
- 买入1份执行价为0的看涨期权

- 卖出2份执行价为δ 的看涨期权
- 买入1份执行价为2δ 的看涨期权
- 这是一个“蝴蝶头寸”，它的支付为：

$$X_p = \left(X_{\square,0} - X_{\square,1}\right) - \left(X_{\square,1} - X_{\square,2}\right)$$

$$= \left[\delta;\delta;\cdots;\delta\right] - \left[0;\delta;\cdots;\delta\right] = \left[\delta;0;\cdots;0\right]$$

- 这是1份状态1或有证券，因为只有状态1时支付才为δ而其他状态的支付为0。

- 类似的，由3个执行价为$(i-1)\delta, i\delta$和$(i+1)\delta$组成的“蝴蝶头寸”在状态i时的支付为δ而在其他状态的支付为0。因此，使用这个期权集合我们可以复制任一的状态或有要求权。
- 记ϕ_i为状态$\omega = i$的状态价格。那么，

$$\phi_i = \frac{1}{\delta}\left\{\left[c\left(K_{i-1}\right)-c\left(K_i\right)\right]-\left[c\left(K_i\right)-c\left(K_{i+1}\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\left\{\left[c\left(K_{i+1}\right)-c\left(K_i\right)\right]-\left[c\left(K_i\right)-c\left(K_{i-1}\right)\right]\right\}\delta$$

- 其中，$K = i\delta$。任意支付为$\{X_\omega\}$的资产，其价格应为$S = \sum_i \frac{\left[c\left(K_{i+1}\right)-c\left(K_i\right)\right]-\left[c\left(K_i\right)-c\left(K_{i-1}\right)\right]}{\delta^2} X_{\omega_i}\delta$

- 由于ω_i和K_i一一对应，因此也可以用K_i描述状态，所以证券的支付可以表示为K的函数，我们以$X(K)$来表示证券的支付，当指数证券是连续分布的，即可取K大于0的任一实数值，并且$c(\square)$二阶可导时，我们取 $\delta = dK$ ，显然

$$\frac{\left[c\left(K_{i+1}\right)-c\left(K_{i}\right)\right]-\left[c\left(K_{i}\right)-c\left(K_{i-1}\right)\right]}{\delta^{2}}=\left.\frac{\partial^{2} c(K)}{\partial K^{2}}\right|_{K=K_{i}}$$

- 于是就可以将证券定价的离散形式转换成连续形式，即

$$S=\int_{0}^{\infty} \frac{\partial^{2} c(K)}{\partial K^{2}} X(K) dk$$

- 我们可以用密度函数来定义风险中性概率：

$$q(K)=\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}\bigg/\int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}dk$$

- 无风险债券的价格是

$$B=\int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}dk$$

- 因此

$$\frac{S}{B}=\int_0^\infty q(K)X(K)dk$$

- 我们再次得到了证券价格的鞅性质。

5.6 本章小结

- 1.欧式看涨（看跌）期权给与其购买者在未来某一给定日期、以某一确定价格 K 从（向）期权出售者处买入（卖出）单位股票的权利。美式期权允许购买者在到期日以及之前的任意日期行权。
- 2.根据无风险原理，欧式看涨期权价格具有一个上界和下界：

$$\left[S-K/(1+r_F)\right]_+ \leq c(S,K) \leq S$$

- 3.看涨--看跌期权的平价关系：如果存在无风险证券且利率为，那么我们有

$$c(S,K)+K/(1+r_F)=p(S,K)+S$$

- 4.美式期权的价格不会低于相应的欧式期权的价格，即

$$C(S,K)\geq c(S,K),P(S,K)\geq p(S,K)$$

- 5.（a）如果没有股利，美式看涨期权不会提前行权，

$$C(S,K)=c(S,K)$$

- （b）对于美式期权来说，股利促使持有者提前执行看涨期权、推迟执行看跌期权。
- 6.有股利时的看涨看跌期权平价关系：

$$c(S,K)+K/(1+r_F)+D=S+p(S,K)$$

- 7.当证券市场是完全的因而期权是冗余证券时，利用无套利原理，可以用原生证券（即标的证券和债券）的价格为期权定价（二叉树期权定价模型）；当期权不是冗余证券时，期权可以增进证券市场的完全性。

Thx!